Глава 5

ОСНОВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

5.1. Автоматическое регулирование. Основные понятия и определения

Автоматическим регулированием называется изменение какой-либо физической величины по требуемому закону без непосредственного участия человека.

Физическая величина, подлежащая регулированию, называется регулируемой величиной, а технический агрегат (аппарат), в котором осуществляется автоматическое регулирование, – регулируемым объектом (объектом регулирования).

Обозначим через $y(t)$ функцию, описывающую изменение во времени регулируемой величины, и пусть $g(t)$ – функция, характеризующая закон ее изменения. Тогда основная задача автоматического регулирования сводится к обеспечению равенства $y(t)=g(t)$ за время работы системы с заданной степенью точности. Функция $g(t)$ называется *задающим воздействием*.

В реальных объектах регулирования всегда существуют причины, отклоняющие регулируемую величину от требуемого закона изменения. Эти причины называются *возмущающими воздействиями* (*возмущениями*) и обозначаются:

$$f_1(t),\ f_2(t),\dots,\ f_n(t).$$

Для борьбы с возмущениями объект регулирования (ОР) снабжается регулирующим органом (РО), воздействуя на который (вручную или автоматически) можно изменять регулируемую величину, компенсируя нежелательное ее изменение. Воздействие на регулирующий орган называется *регулирующим воздействием* и обозначается буквой μ (рис. 5.1, *а*).

Устройство, автоматически решающее задачу регулирования в данном объекте, называется *автоматическим регулятором*. Объект регулирования и автоматический регулятор в совокупности образуют автоматическую систему регулирования (АСР) (рис. 5.1, *б*).

Если $y(t) = g(t)$, а n = const, то АСР находится в стационарном, или установившемся режиме.

Если $y(t) = g(t)$,а $n = var$, то АСР находится в нестационарном, или переходном режиме работы.

На рис. 5.2 приведены графики $y(t)$ и $x(t)$ в стационарном и переходном режимах работы АСР.

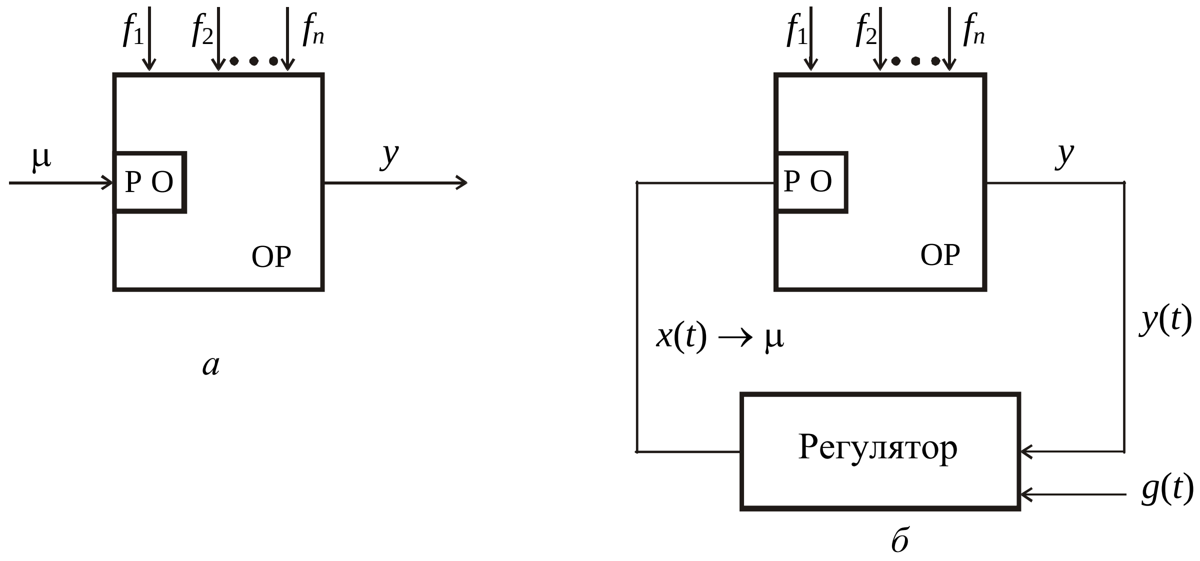

Рис. 5.1. Объект (*а*) и система автоматического регулирования (*б*)

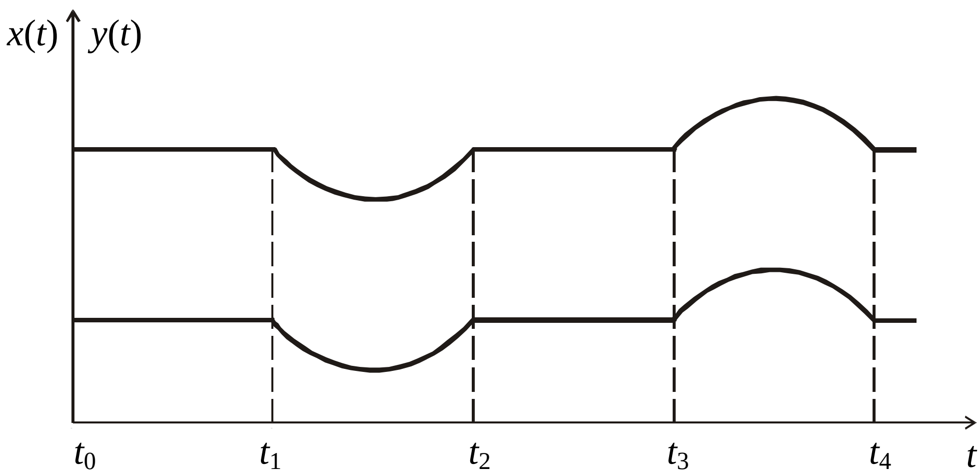

Рис. 5.2. Режимы работы АСР:
($t_0 - t_1$) и ($t_2 - t_3$) – установившийся режим;
($t_1 - t_2$) и ($t_3 - t_4$) – неустановившийся режим;
t_1, t_3 – момент воздействия возмущения

5.2. Принципы регулирования

Разнообразные, используемые в современной технике, регуляторы строятся на базе одного из двух основных принципов регулирования:

по возмущению (по внешнему воздействию);

по отклонению (по ошибке).

Принцип регулирования по возмущению. Этот принцип был предложен французским ученым Понселе и впервые реализован во второй половине XIX в. русским электротехником В.Н. Чиколевым в разработанных им регуляторах силы света дуговых ламп. Принцип регулирования по возмущающему воздействию называют также *принципом компенсации возмущений*.

Основной величиной, отклоняющей регулируемую величину от требуемого закона, являются всякого рода возмущающие воздействия.

Для компенсации вредного влияния какого-либо возмущающего воздействия после его измерения можно осуществить регулирующие воздействия на объект, обеспечивающие изменение величины по требуемому закону. Для технической реализации данного принципа в состав автоматического регулятора должны входить устройства, позволяющие измерить возмущающее воздействие, и устройства, предназначенные для создания регулирующего воздействия на объект регулирования. Первые называются *чувствительными элементами* (ЧЭ), а вторые – *исполнительными элементами* (ИЭ) регулятора. Между чувствительными элементами и исполнительными могут быть включены промежуточные элементы (ПЭ), предназначенные для усиления или преобразования сигнала чувствительного элемента.

Общая схема АСР, реализующая принцип регулирования по возмущению, приведена на рис. 5.3.

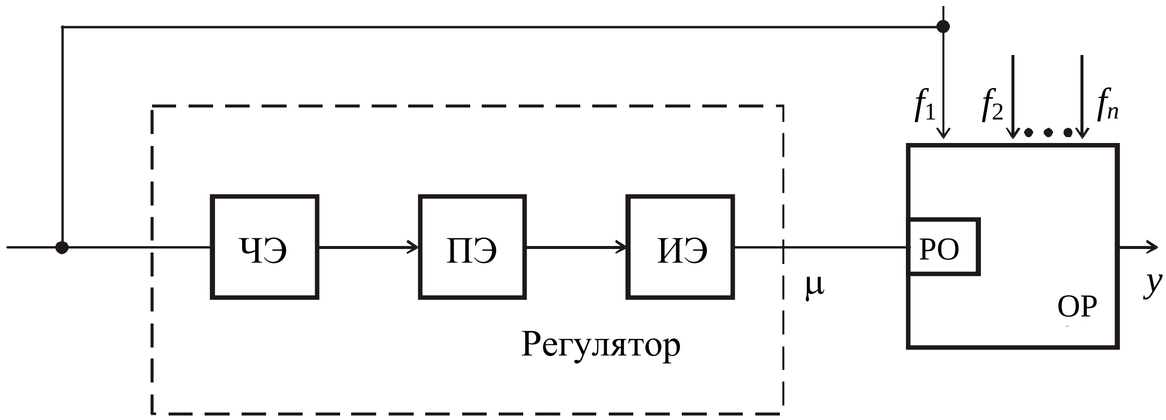

Рис. 5.3. АСР по возмущению

Из рис. 5.3 видно, что регулятор такого типа обеспечивает независимость (инвариантность) регулируемой величины от возмущающего воздействия АСР, работающих по возмущению, имеет ряд недостатков:

1. В АСР, работающих по возмущению, инвариантность регулируемой величины обеспечивается лишь по отношению к тому возмущающему воздействию, которое измеряется чувствительным элементом регулятора. Наличие большого числа других, не контролируемых регулятором, возмущающих воздействий приводит к тому, что регулируемая величина отличается от требуемого значения, т.е. задача регулирования не выполняется.

2. Инвариантность по отношению к возмущению, измеряемому чувствительным элементом регулятора, в рассматриваемых АСР обеспечивается только при условии строгого соответствия параметров регулятора и объекта их расчетным значениям. Изменение параметров регулятора или объекта (вследствие старения, влияния внешних условий и т.д.) приводит в таких системах к отклонению регулируемой величины от требуемого значения.

Оба отмеченных недостатка АСР, работающих по возмущению, обусловлены тем, что в таких системах истинное значение регулируемой величины не измеряется и не контролируется. Регулирующее воздействие μ от регулируемой величины y не зависит. Система работает по разомкнутому циклу.

Из-за отмеченных выше недостатков системы, работающие по разомкнутому циклу, для решения задач автоматизации применяются только в качестве составной части более сложных, комбинированных АСР.

Принцип регулирования по отклонению. Этот принцип построения автоматических регуляторов предложен и впервые осуществлен в 1765 г. русским механиком И.И. Ползуновым в регуляторе уровня воды в котле изобретенной им паровой машины. Несколько позже (независимо от И.И. Ползунова) этот принцип использовал английский механик Дж. Уатт при разработке центрального регулятора скорости вращения выходного вала паровой машины. В связи с этим принцип регулирования по отклонению часто называют *принципом Ползунова – Уатта.*

Основная задача АСР состоит в выполнении равенства $y(t) = g(t)$, причем чем точнее соблюдается равенство, тем лучше АСР. Разность между требуемым законом изменения регулируемой величины $g(t)$ и действительным законом ее изменения $y(t)$ характеризует качество работы АСР:

$$x(t) = g(t)\text{-}y(t), \tag{5.1}$$

при идеальной работе $x(t) = 0$.

Для оценки качества работы АСР используют так называемое отклонение:

$$y(t) = y(t)\text{-}g(t). \tag{5.2}$$

Принцип регулирования по отклонению состоит в том, что тем или иным путем определяется отклонение параметра и соответственно осуществляется регулирующее воздействие на объект регулирования, сводящее отклонение к нулю. Для определения сигнала отклонения используются три элемента: *задающий, чувствительный и сравнивающий.* Задающий элемент формирует воздействие $g(t)$.

Чувствительный элемент измеряет действительное значение.

Сравнивающий элемент представляет собой простейшее вычислительное устройство.

Функциональная схема АСР, работающая по отклонению, приведена на рис. 5.4.

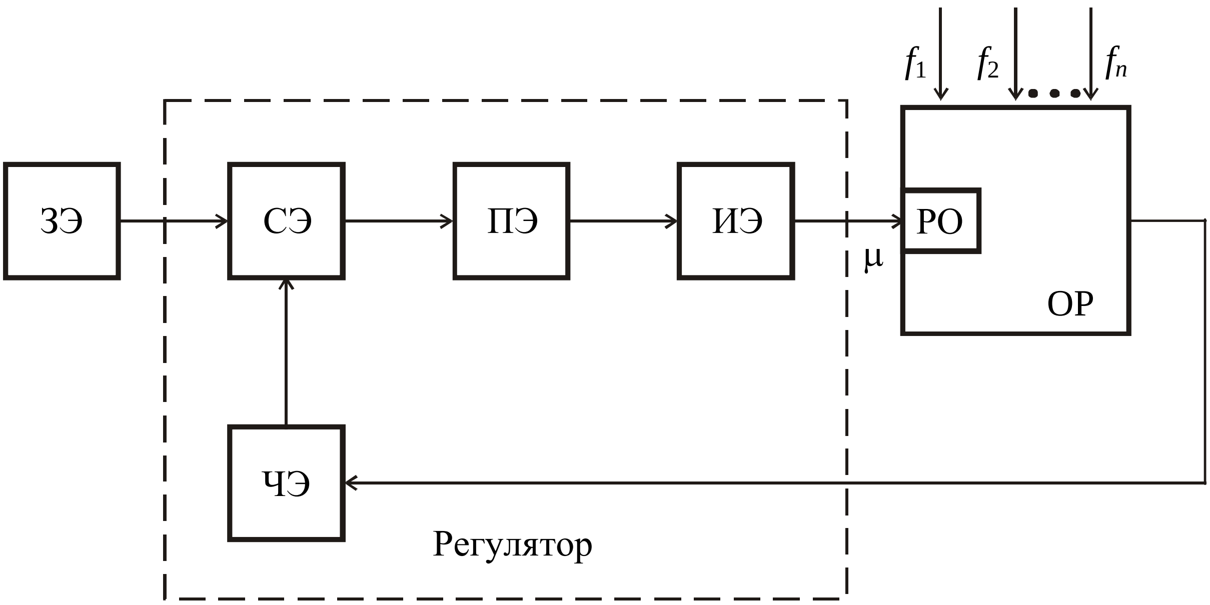

Рис. 5.4. АСР по отклонению

В этой схеме регулируемая величина *y* измеряется чувствительным элементом и подается на вход сравнивающего элемента (СЭ). На другой вход сравнивающего элемента поступает задающее воздействие *g*, выработанное в задающем элементе (ЗЭ). На выходе сравнивающего элемента образуется сигнал отклонения. После преобразования в промежуточных элементах (ПЭ) сигнал ошибки поступает на исполнительный механизм, перемещающий регулирующий орган таким образом, чтобы свести сигнал ошибки к нулю. Чувствительный, промежуточный и исполнительный органы в совокупности образуют автоматический регулятор. На рис. 5.4 видно, что АСР, работающая по отклонению, состоит из соединенных между собой автоматического регулятора (АР) и объекта регулирования (ОР). На вход регулятора поступают задающие воздействия *g* и регулируемая величина *y*. Выходной величиной является регулирующее воздействие, приложенное к регулирующему органу.

В отличие от регулирования по возмущению при регулировании по отклонению ни одно из возмущающих воздействий не измеряется.

Основным преимуществом АСР, работающих по отклонению, перед АСР, реализующими принцип регулирования по возмущению, является их способность выполнять задачу регулирования при любом числе возмущающих воздействий. Объясняется это тем, что в АСР, работающих по отклонению, ни одно возмущение не измеряется; работа системы не связана ни с какими конкретными возмущениями. Вместо возмущения в таких системах непрерывно измеряется отклонение, характеризующее соответствие действительного закона изменения регулируемой величины требуемому. Вторым преимуществом АСР, работающих по отклонению, является отсутствие местных требований к стабильности характеристик элементов регулятора и объекта. Обусловлено это тем, что изменение параметров регулятора и объекта приводит к появлению отклонения, которое немедленно обнаруживается системой и ликвидируется.

Таким образом, АСР, работающие по отклонению, лишены основных недостатков АСР, работающих по возмущению. Это обстоятельство явилось причиной того, что в настоящее время регулирование по отклонению является основным принципом построения регуляторов в самых различных областях техники.

АСР, работающие по отклонению, представляют собой системы с обратной связью. Под обратной связью понимают подачу сигнала, когда сигнал обратной связи складывается с входным сигналом, обратная связь называется положительной, если вычитается, – отрицательной. Для систем регулирования входным устройством является задающее воздействие g, выходным – регулируемая величина y.

Наличие обратной связи в АСР, работающих по отклонению, приводит к образованию замкнутого контура передачи воздействий. Регулятор действует на объект, объект, в свою очередь, воздействует на регулятор. В связи с этим АСР, реализующие принцип регулирования по отклонению, называют системами, работающими по замкнутому циклу, или замкнутыми системами. Однако системам с обратной связью присущи и некоторые недостатки.

Так как регулирующее воздействие, направленное на ликвидацию отклонения, появляется только при $y = 0$, то, следовательно, прежде чем ликвидировать отклонение, необходимо допустить его возникновение. Кроме того, замкнутые системы склонны к колебаниям.

Оба отмеченных недостатка АСР, работающих по отклонению, отсутствуют у систем, работающих по возмущению. В то же время, как уже указывалось, системы, работающие по отклонению, лишены основных недостатков систем, работающих по возмущению. Поэтому целесообразно использовать оба основных принципа регулирования в одной системе. Системы, в которых одновременно используется как регулирование по отклонению, так и регулирование по возмущению, называются *системами комбинированного регулирования*. Такие системы обычно представляют собой сочетание двух систем, одна из которых работает по замкнутому, а вторая – по разомкнутому циклу, обеспечивает инвариантность регулируемой величины по отношению к одному из основных возмущений (рис. 5.5), наиболее сильно влияющему на регулируемую величину.

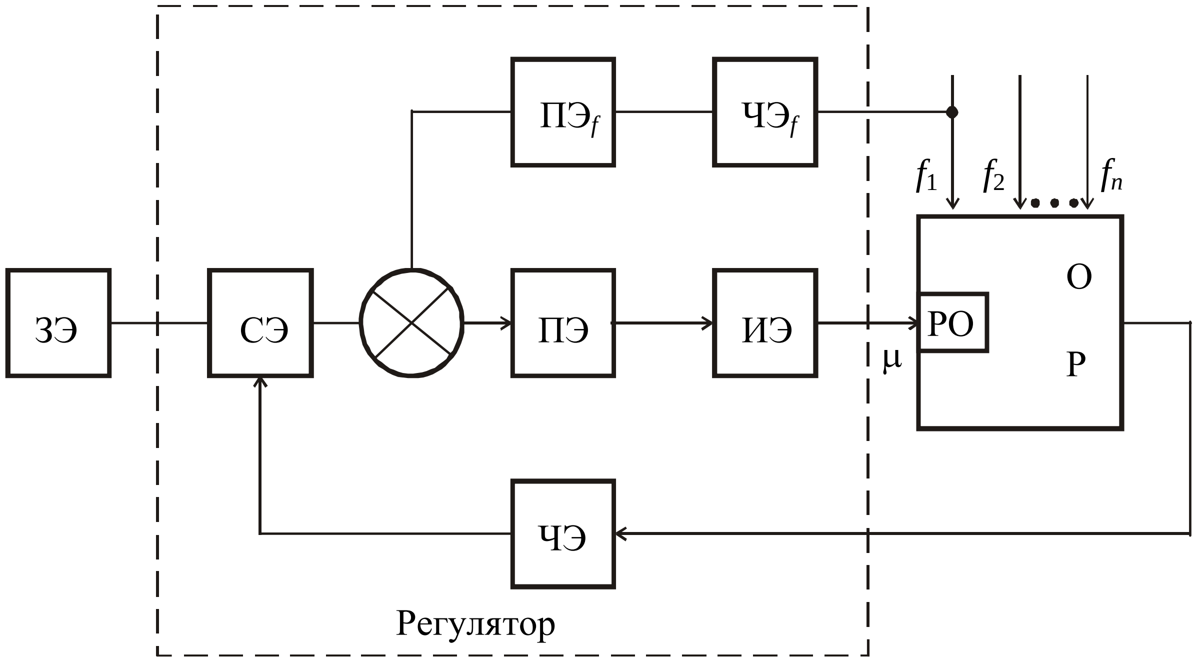

Рис. 5.5. Комбинированная АСР

Система, работающая по замкнутому циклу, снимает вредное влияние всех других возмущающих воздействий. Промежуточные и исполнительные элементы у обеих систем являются общими.

5.3. Основные виды автоматических систем регулирования

В зависимости от закона $g(t)$ изменения регулируемой величины $y(t)$ все АСР принято делить на системы стабилизации, программного регулирования и следящие.

Системы стабилизации предназначены для поддержания постоянного значения регулируемой величины $y(t)$. В этих системах

$$g(t) = \text{const}.$$

Системы программного регулирования предназначены для изменения регулируемой величины $y(t)$ по известному закону в функции времени или какой-либо другой величины. В таких системах задающее воздействие представляет собой заранее известную функцию времени $g(t) = g_0(t)$ или $g = g_0(z)$ и ее часто называют *программой регулирования*. Программы вида $g(t) = g_0(t)$ называются *временными*, а программы вида $g = g_0(z)$ – *параметрическими*.

Следящие системы предназначены для изменения регулируемой величины $y(t)$ по закону, который заранее неизвестен. В таких системах воздействие $g(t)$ представляет собой случайную функцию времени.

В зависимости от наличия статических свойств все системы автоматического регулирования разделяют на статические и астатические.

Система автоматического регулирования, в которой в установившемся состоянии существует однозначная зависимость между значением регулируемой величины и положением регулирующего органа, называется статической.

Астатической называют систему автоматического регулирования, в которой положение регулирующего органа не связано с установившимся значением регулируемой величины.

В зависимости от способности приспосабливаться (адаптироваться) к изменяющимся внешним условиям и перестраиваться таким образом, чтобы компенсировать указанные изменения, системы автоматического регулирования разделяются на экстремальные, самообучающиеся и обучаемые.

В экстремальных системах автоматически поддерживается экстремальное (минимальное и максимальное) значение регулируемого параметра, соответствующее оптимальным условиям протекания регулируемого процесса.

Самообучающейся системой называется такая система, в которой самообучение при отыскании оптимального режима работы объекта регулирования все время автоматически совершенствуется по мере накопления в системе опыта регулирования.

Обучаемой системой называется такая система, в которой для нормального функционирования в процессе работы накапливается опыт, а обучающее воздействие система получает извне или со стороны человека – оператора, или со стороны автоматического обучающего устройства, не входящего в состав этой системы.

5.4. Типовые динамические звенья автоматических систем регулирования

В теории автоматического регулирования решаются две задачи:

определение степени удовлетворения системы предъявляемым к ней требованиям (анализ системы);

проектирование системы по заданным требованиям (синтез системы).

Для получения кривой регулирования необходимо решить систему уравнений, описывающих свойства элементов АСР и их связи при начальных условиях и для определенного возмущения. Так как речь идет об изменениях во времени, требуется решать систему дифференциальных уравнений, что весьма сложно, а иногда и невозможно. Однако можно пользоваться рядом упрощений при решении задач синтеза или анализа АСР с получением точности, достаточной для практических целей. Прежде всего необходимо разбить АСР на элементарные звенья, и не обязательно, чтобы звенья совпали по функциональному или конструктивному признакам, но были бы идентичны по динамическим свойствам. Общих правил выполнения этого шага не существует, но звенья не должны быть слишком крупными и сложными, иначе трудно математически их описать, и если разбивка слишком мелкая, то резко увеличивается число уравнений.

Элементы автоматических систем регулирования, имеющие различную конструкцию и принципы действия, использующие разные виды энергии и выполняющие разные функции, описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями, т.е. обладают аналогичными динамическими свойствами. Например, два различных устройства (рис. 5.6) описываются однотипными дифференциальными уравнениями.

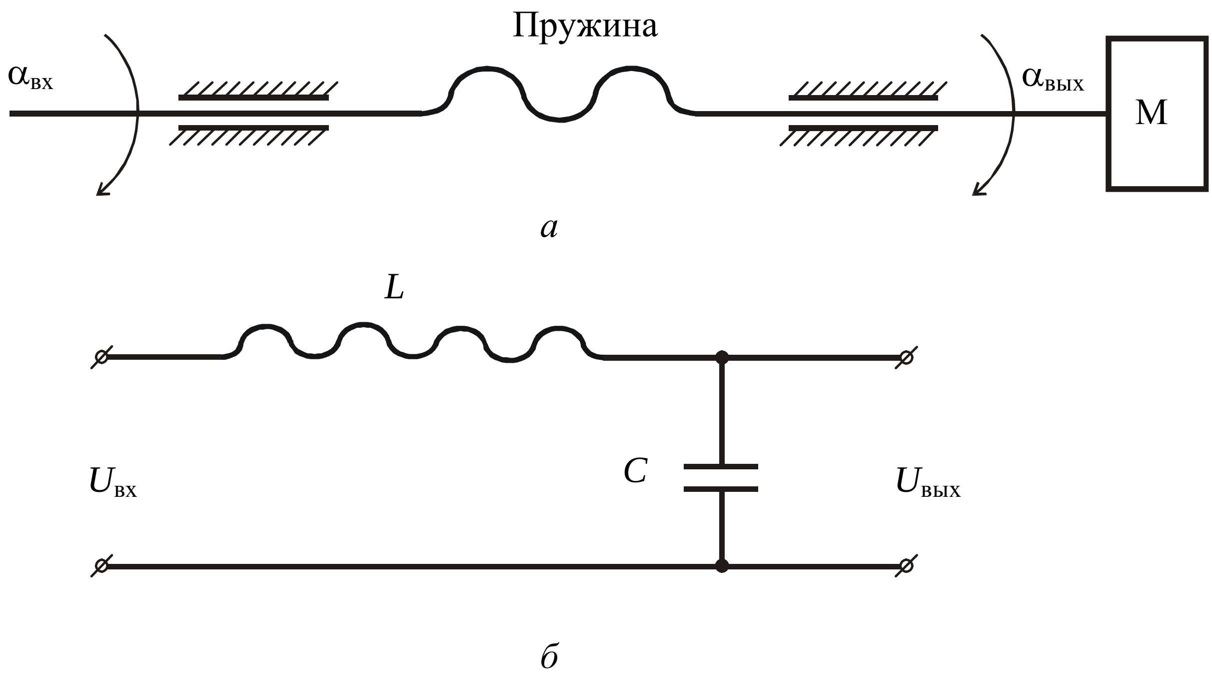

Рис. 5.6. Устройство с однотипным переходным процессом

Поведение механического устройства (рис. 5.6, *а*) описывается уравнением

$$J(d^2\alpha_{вых}/dt^2 + K\alpha_{вых}) = \alpha_{вх}, \tag{5.3}$$

где $\alpha_{вых}$ и $\alpha_{вх}$ – углы поворота выходного и входного валов устройства соответственно; J – момент инерции маховика; K – коэффициент упругости пружины.

Поведение электрической цепи (5.6, *б*) описывается уравнением

$$LC(d^2U_{\text{вых}})dt^2 + U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}}, \qquad (5.4)$$

где $U_{\text{вх}}$ и $U_{\text{вых}}$ – напряжение на входе и выходе цепи соответственно; L – индуктивность катушки; C – емкость конденсатора.

Оба уравнения можно привести к виду

$$a(d^2x_{\text{вых}} / dt^2 + bx_{\text{вых}}) = cx_{\text{вх}}^2, \qquad (5.5)$$

где $x_{\text{вх}}$ и $x_{\text{вых}}$ – входная и выходная величины соответственно; a, b, c – постоянные коэффициенты.

Однотипные звенья дают отклик одного и того же вида на одинаковые входные воздействия, поэтому если известен вид звена, известно и его поведение. Благодаря этому свойству можно идентифицировать звено (т.е. установить его тип) и определить его параметры (значения коэффициентов в дифференциальном уравнении) по отклику звена на стандартное воздействие.

Кривые отклика на такие воздействия, т.е. изменения выхода звена $y = f(t)$, называются *временными характеристиками*, причем отклик на единичный скачок называется *кривой разгона*.

При разбивке АСР на звенья они должны остаться по своей природе детектирующими, иначе говоря, иметь направленное действие. При этом связь между сигналами на входе и выходе в каждом звене односторонняя, направленная.

После разбивки системы регулирования на звенья получают их уравнение. С этой целью для каждого звена записывают уравнение баланса (материального, теплового и т.д.), уравнение кинетики и т.п. Из системы уравнений звена получают его дифференциальное уравнение.

Примерный порядок составления дифференциального уравнения звена заключается в следующем:

определяют входную и выходную величины звена и устанавливают дополнительные факторы, от которых зависит выходная величина;

выбирают начало отсчета и положительные направления всех входящих переменных;

вводят те или иные упрощения (допущения);

используют основные законы той отрасли науки и техники, к которой относится исследуемое звено: законы Кирхгофа для электрических звеньев; законы Ньютона – для звеньев механической природы, законы сохранения энергии и вещества – для гидравлических и пневматических звеньев и др.

Дифференциальное уравнение звена отражает его свойства. Все звенья, которые имеют аналогичные дифференциальные уравнения, имеют аналогичные динамические и статические свойства, независимо от физической природы звена (химический аппарат, цепочка электрических элементов и т.п.), процесса, протекающего в нем, его входа и выхода. Это позволяет выделить небольшое число динамических звеньев и отнести любое линейное звено к определенному виду.

Решение дифференциальных уравнений типовых звеньев представляет определенную сложность. В связи с этим используется операторная форма их записи, которая дает возможность осуществить операции дифференцирования и интегрирования и заменить их на более простые алгебраические операции над некоторым оператором *P*. Оператор *P* заменяет операцию дифференцирования по времени, т.е. *d/dt.* В результате можно решить дифференциальное уравнение алгебраически, т.е. не используя сложную операцию интегрирования. Необходимо отметить, что при решении дифференциальных уравнений операторным методом осуществляется переход от данных функций (оригиналов) к их изображениям. Указанный переход и обратный, т.е. переход от изображений к оригиналам, осуществляется с помощью формулы Лапласа – Карсона:

$$x(P) = P\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-pt}x(t)dt, \tag{5.6}$$

где e – основание натурального логарифма; $x(t)$ – исходная функция времени; P – комплексная переменная, называемая *оператором*.

На практике переход от оригиналов к изображениям и обратно производится по таблице изображений типовых функций, вычисленных по формуле (5.6).

Функция $x(P)$, как видно из выражения (5.6), получается умножением $x(t)$ на экспоненциальную функцию и интегрированием полученного произведения в пределах от нуля до бесконечности. В выражении (5.6) P рассматривается уже не как функция времени, а как функция комплексного числа

$$P = \sigma - jw, \tag{5.7}$$

где σ и jw – соответственно действительная и мнимая части.

Функция времени, которая преобразуется, называется *оригиналом*, а функция, полученная в результате преобразования, – *изображением*.

Операция перехода от функции $xZ(t)$ к ее операторному изображению $x(P)$ *называется прямым преобразованием Лапласа*. Обратная операция, т.е. нахождение функции $x(t)$ по ее операторному изображению $x(P)$, называется *обратным преобразованием Лапласа*. Преобразование Лапласа позволяет находить решение дифференциального уравнения без непосредственного его интегрирования. В этом случае сначала находят изображение исходного уравнения, а затем решают изображение относительно интересующей величины. Полученное уравнение будет изображением по Лапласу. Чтобы найти решение дифференциального уравнения, т.е. функцию времени, следует по изображению найти оригинал. Эта операция выполняется с помощью обратного преобразования Лапласа.

По дифференциальному уравнению звена можно найти его передаточную функцию. Использование передаточных функций звена упрощает рассмотрение отдельных звеньев и систем автоматического управления в целом. Передаточная функция звена выражает связь между его выходом и входом: она показывает, какую операцию совершает звено над входным воздействием. Таким образом, *передаточной функцией звена называется отношение операторного изображения функции сигнала на выходе звена* $y(P)$ *к операторному изображению функции возмущающего воздействия на входе того же элемента* $x(P)$.

По дифференциальному уравнению звена можно найти его передаточную функцию. Например, если звено описывается дифференциальным уравнением

$$T\frac{dy}{dt} + y = Kx \qquad (5.8)$$

или в операторной форме

$$T^{y+1}y(P) = Kx(P).$$

Передаточная функция будет иметь вид:

$$W(P) = K/(TP+1). \qquad (5.9)$$

Передаточная функция служит для анализа свойств звеньев и АСР. Передаточная функция линейного звена по внешнему воздействию не зависит от закона изменения воздействия и определяется только свойствами самого звена.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся динамические звенья и определим для каждого из них основные характеристики: дифференциальное уравнение, передаточную функцию, временную и др.

Безынерционное звено (идеальное). Безынерционным звеном называется такое звено, в котором выходная величина y пропорциональна входной x, т.е. выходная величина изменяется по тому же закону, что и входная, и воспроизводит без искажений и запаздываний входную величину:

$$y = Kx. \qquad (5.10)$$

Переходный процесс в усилительном звене отсутствует. Примером безынерционного (усилительного) звена может служить рычажное устройство (рис. 5.7).

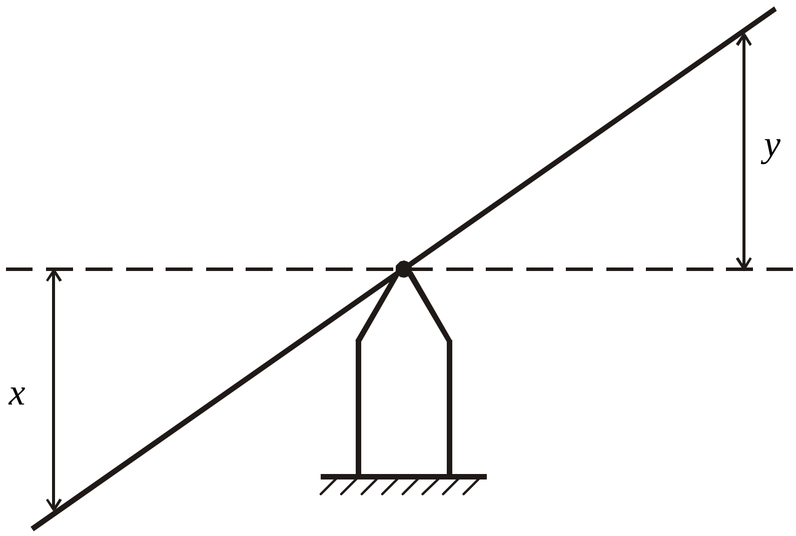

Рис. 5.7. Рычажное устройство

Перемещение одного конца рычага вызывает соответствующее перемещение второго. Коэффициент усиления *K* определяется величиной отношения плеч рычага. Характерной величиной таких звеньев служит только одна величина – коэффициент усиления *K*.

К усилительным звеньям можно отнести усилитель напряжения, усилительную лампу, транзистор, редуктор, трансформатор и т.п.

Передаточная функция безынерционного звена имеет вид:

$$W(P) = K. \tag{5.11}$$

Апериодическое (инерционное) звено. Апериодическим (инерционным, релаксационным, одноемкостным) называется звено, в котором при скачкообразном изменении входной величины x выходная величина y по экспоненциальному закону стремится к новому установившемуся значению. Данное звено имеет свойство накопления, как два соединённых между собой элемента, один из которых запасает энергию или вещество, а второй создаёт сопротивление протеканию энергии или вещества, в результате чего поданный на вход такого звена сигнал вызывает изменение выходной величины с некоторым запаздыванием. Описывается звено уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$Tdy/dt+y = Kx, \tag{5.12}$$

где T и K – постоянные коэффициенты (T – постоянная времени, K – передаточный коэффициент), которые зависят от принципа действия элемента и его конструкции.

Решение дифференциального уравнения звена при единичном входном воздействии даёт выражение для переходной функции звена

$$y = Kx\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

или, учитывая, что $x = 1$,

$$y = K\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \qquad (5.13)$$

В качестве примеров апериодических звеньев можно привести устройства, показанные на рис. 5.8.

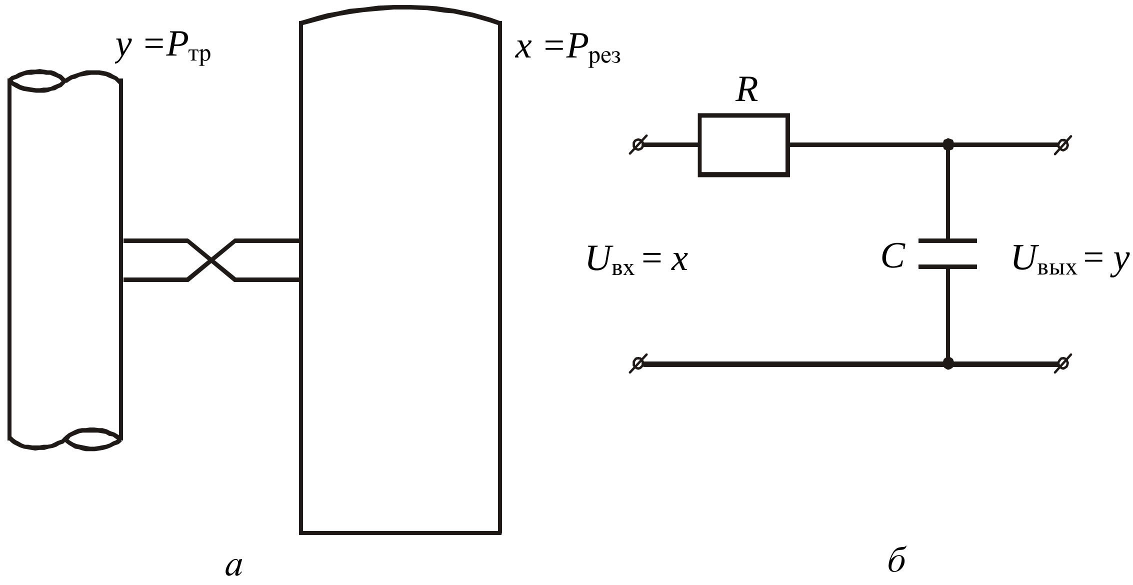

Рис. 5.8. Примеры апериодических звеньев:
а – емкость периодического заполнения;
б – колебательный контур

Таким образом, постоянная времени T апериодического звена численно равна отрезку времени, за который выходная величина изменилась от 0 и достигает 63 % от установившегося значения.

Дифференциальное уравнение (5.12) в операторной форме записывается в следующем виде:

$$TPY(P)+Y(P) = KX\,(P), \qquad (5.14)$$

откуда передаточная функция апериодического звена

$$W = K/(TP+1). \qquad (5.15)$$

При последовательном соединении двух апериодических звеньев первого порядка получают апериодическое звено второго порядка, уравнение динамики которого можно записать в следующем виде:

$$T^2 d^2y/dt^2 + 2\sigma dy/dt + y = Kx, \qquad (5.16)$$

где T – постоянная времени; σ – коэффициент затухания; K – коэффициент передачи.

Уравнение в операторной форме имеет вид:

$$(T^2P^2 + 2\sigma TP + 1)\ Y(P) = KX(P), \qquad (5.17)$$

откуда передаточная функция звена

$$W(P) = K/(T^2P^2 + 2\sigma TP + 1). \qquad (5.18)$$

Колебательное звено. Колебательным называется такое звено, у которого после скачкообразного изменения его входной величины выходная величина стремится к установившемуся значению, совершая колебания.

Это звено представляет собой устройство из двух элементов, которые способны запасать энергию и взаимно обмениваться ею (рис. 5.9).

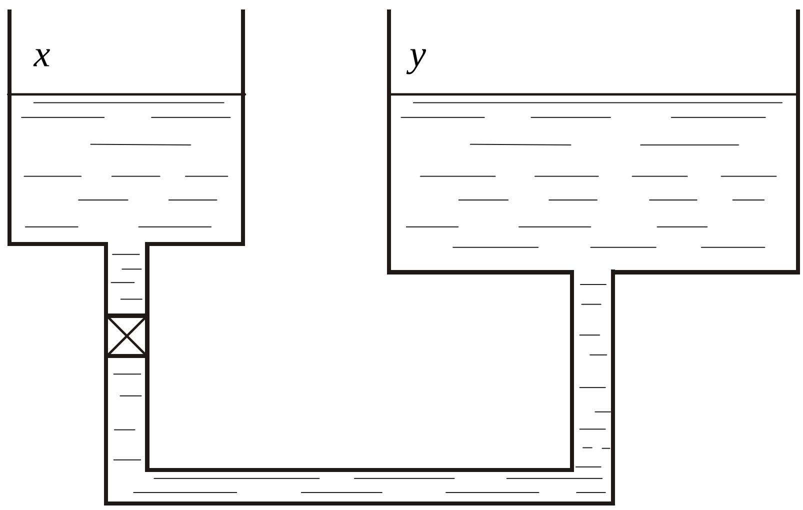

Рис 5.9. Колебательное звено

Динамические свойства такого звена выражаются дифференциальным уравнением

$$T_0^2\left(\frac{d^2y}{dt^2} + T_1\frac{dy}{dt} + y\right) = Kx, \qquad (5.19)$$

где T_0 и T_1 – постоянные времени звена; K – передаточный коэффициент.

В операторной форме уравнение это принимает вид:

$$\left(T_0P^2 + T_1P + 1\right)Y(P) = KX(P). \qquad (5.20)$$

Передаточная функция звена

$$W(P) = \frac{K}{T_0^2 P^2 + T_1 P + 1}. \tag{5.21}$$

Интегрирующее звено. Интегрирующим звеном называется такое звено, в котором выходная величина *y* пропорциональна интегралу по времени от входной величины (т.е. скорость изменения выходной величины пропорциональна входной величине):

$$y = K\int xdt \text{ или } \frac{dy}{dt} = Kx, \tag{5.22}$$

где K – коэффициент усиления звена.

Для таких устройств нет определённого соотношения между значениями выходной и входной величин в установившемся режиме и передаточный коэффициент характеризует соотношение между значениями входной величины и скоростью изменения выходной величины.

Уравнение в операторной форме будет иметь вид:

$$P(Y)P = KX(P), \tag{5.23}$$

а передаточная функция

$$W(P) = K/P. \tag{5.24}$$

Дифференцирующее звено. Дифференцирующее звено – звено, в котором выходная величина пропорциональна скорости изменения входной величины, т.е. выходная величина пропорциональна производной от входной величины. Различают два вида дифференцирующих звеньев: идеальное и реальное.

Дифференциальное уравнение для *идеального дифференцирующего звена* записывается в виде:

$$y = K\, dx/dt, \tag{5.25}$$

где dx/dt – скорость изменения входной величины.

Запишем уравнение (5.25) в операторной форме:

$$Y(P) = KPX(P). \tag{5.26}$$

Из уравнения (5.26) найдём передаточную функцию идеального звена:

$$W(P) = KP. \tag{5.27}$$

При скачкообразном изменении входной величины на конечное значение её скорость бесконечно велика. При достижении входной величиной нового постоянного значения скорость её изменения становится равной нулю. Следовательно, выходная величина получает в момент $x_{вх}$ мгновенный импульс, величина которого изменяется от нуля до бесконечности и снова возвращается к нулю.

Идеальное звено осуществить на практике невозможно, поэтому принимают реальные дифференцирующие звенья как звенья, обладающие инерционностью и потерей энергии. Их дифференциальное уравнение

$$T\,dy/dt + y = KT\,dx/dt. \qquad (5.28)$$

Уравнение в операторной форме

$$(TP+1)y(P) = KTPx(P), \qquad (5.29)$$

откуда передаточная функция звена

$$W(P) = KTP/(TP+1). \qquad (5.30)$$

Примером *реального дифференцирующего звена* может быть *RC* контур.

5.5. Частотные характеристики динамических звеньев

Временными характеристиками удобно пользоваться при определении характера переходного процесса в системах автоматического регулирования. Однако в реальных системах очень часто входной сигнал изменяется по гармоническому или близкому к нему закону заданной амплитуды или частоты, поэтому при исследовании АСР ставится задача нахождения параметров колебаний на выходе системы по известным параметрам колебаний на входе. Решение этой задачи с помощью временных характеристик представляет определённые трудности. Рассматриваемый ниже частотный метод позволяет получить реакцию звена (системы) на любой периодический сигнал.

Частотная характеристика описывает установившиеся вынужденные колебания на выходе звена, которые вызваны гармоническим воздействием на входе (рис. 5.10).

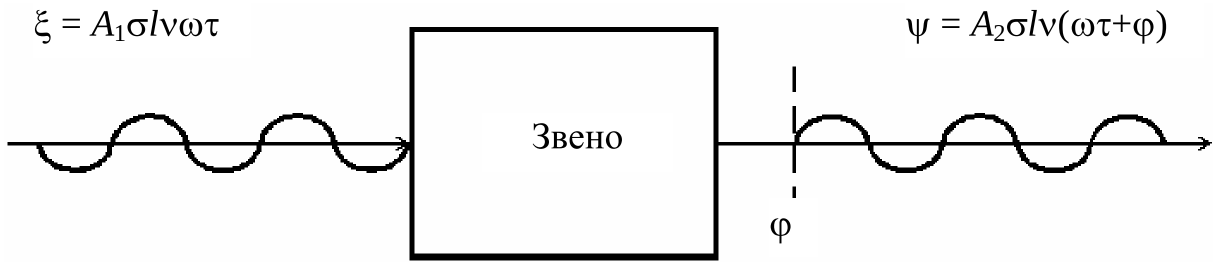

Рис. 5.10. Метод получения частотных характеристик

Подадим на вход звена гармоническое воздействие, изменяющееся по синусоидальному закону:

$$x = A_1 \sin \omega t, \qquad (5.31)$$

где A_1 – амплитуда; ω – угловая частота воздействия.

По окончании переходного процесса на выходе звена будут существовать гармонические колебания той же частоты, что и входные колебания, но они будут отличаться по амплитуде и форме. В установившемся режиме выходная величина звена равна

$$y = A_2 \sin(\omega t + \gamma), \qquad (5.32)$$

где A_2 – амплитуда установившихся выходных колебаний; γ – фазовый сдвиг между входными и выходными колебаниями.

График гармонических колебаний входной и выходной величин приведён на рис. 5.11.

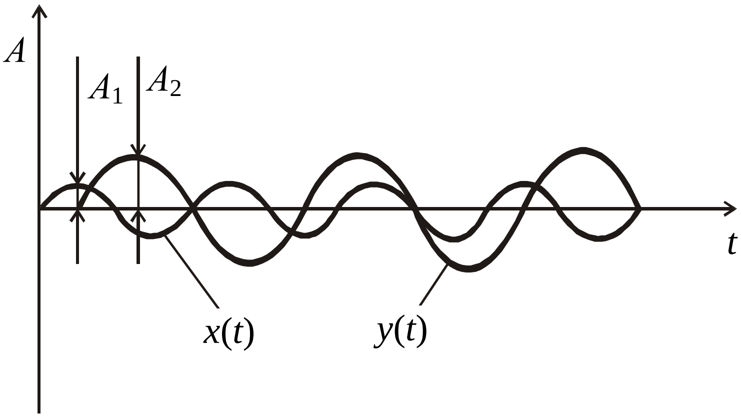

Рис. 5.11. Графические характеристики входной и выходной величин

При фиксированной амплитуде входных колебаний амплитуда и фаза установившихся колебаний на выходе звена зависят от частоты входных колебаний. Запишем входную и выходную величины в комплексной показательной форме:

$$y = A_2 e^{j(\omega t+\gamma)};$$

$$x = A_1 e^{j\omega t}, \qquad (5.33)$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Разделив выходную величину звена на входную, получим выражение частотной функции:

$$W(j\omega) = \frac{A_2 e^{j(\omega t+\gamma)}}{A_1 e^{j\omega t}} = \frac{A_2 e^{j\omega t} e^{j\gamma}}{A_1 e^{j\gamma\omega}} = A(\omega) e^{j\gamma\omega}, \qquad (5.34)$$

где $A(\omega) = A_2 / A_1$ – модуль частотной функции (отношение амплитуд выходного и входного колебаний); e – основание натурального логарифма;

$\gamma(\omega)$ – аргумент частотной функции (разность фаз выходного и входного колебаний).

Модуль A и аргумент γ зависят от угловой частоты, т.е. при повторении опыта с входными колебаниями другой частоты изменяются амплитуды и фазовый сдвиг звена.

Зависимость $A = A_2 / A_1 = f(W)$ называется амплитудно-частотной характеристикой звена (АЧХ). Совмещенную же характеристику $W(j\omega)$ принято называть амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ), т.е. если в выражении передаточной функции звена $W(P) + y(P)/x(P)$ заменить P на $j\omega$, то полученная частотная функция $W(j\omega) = y(j\omega)/x(j\omega)$ будет являться совмещённой характеристикой звена, которую называют амплитудно-фазовой (АФХ).

Такую характеристику, подобно любому комплексному числу, можно представить в прямоугольных координатах как сумму вещественной *Re* и мнимой *Im* частей:

$$W(j\omega) = ReW(j\omega) + jImW(j\omega). \qquad (5.35)$$

$ImW(j\omega) = jV(\omega)$ – мнимая частотная характеристика звена; $ReW(j\omega) = U(\omega)$ – вещественная частотная характеристика звена.

Подставляя в выражение (5.34) различные значения *W*, лежащие в пределах от 0 до ∞, получим множество векторов с различными амплитудами и фазами. Если построить эти векторы и концы их соединить плавной кривой, то получим график совмещённой характеристики, т.е. если частотную функцию представить на комплексной плоскости в виде вектора $W(j\omega_1)$, имеющего длину $A(\omega_1)$ и угол наклона к действительной оси $\varphi(\omega_1)$, то при изменении частоты от 0 до ∞ конец вектора $W(j\omega)$ описывает кривую, называемую *годографом* или *графическим изображением* (АФХ) совмещённой характеристики (рис. 5.12).

Стрелка указывает направление увеличения частоты. Знаки *j* и ω обозначают мнимую и действительную оси комплексной плоскости.

Таким образом, *совмещённой характеристикой* (*амплитудно-фазовой характеристикой*) называется геометрическое место концов радиусов векторов (длины которых равны отношениям амплитуд выходной величины к входной, а угол по отношению к оси равен разности фаз) при изменении частоты от 0 до ∞. Амплитудно-фазовая характеристика показывает, как изменяются амплитуда и фаза сигнала при его прохождении через данное звено при различных частотах.

Частотные методы исследования линейных систем автоматического регулирования упростились после того, как для построения графиков частотных характеристик были введены логарифмические шкалы.

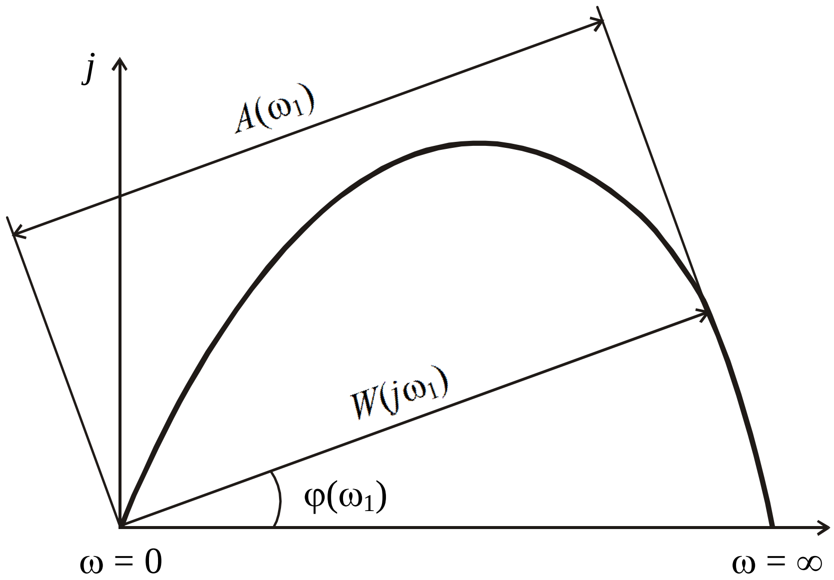

Рис. 5.12. Годограф

Частотные характеристики, построенные в логарифмических шкалах, называются *логарифмическими частотными характеристиками*. Логарифмические шкалы по одной или обеим осям могут использоваться при построении любых частотных характеристик. Чаще всего строятся характеристики $A(\omega)$ и $W(j\omega)$, называемые соответственно логарифмической амплитудной частотной характеристикой, логарифмической фазовой частотной характеристикой и логарифмической амплитудно-фазовой характеристикой.

Для построения логарифмических частотных характеристик нужно прологарифмировать выражение для амплитудно-фазовой характеристики. Так, прологарифмировав выражение (5.35), получим

$$\ln W(j\omega) = \ln A(\omega) + j\gamma(\omega)\,. \tag{5.36}$$

Выражение $\ln A(\omega)$ представляет собой вещественную часть логарифма $W(j\omega)$ и, будучи построено графически, изображает логарифмическую амплитудно-частотную характеристику звена. Мнимая часть логарифма $W(j\omega)$ является фазой функции $W(j\omega)$, т.е. представляет собой фазочастотную характеристику.

Единицами измерения логарифмических координат являются по оси абсцисс октава и декада (дек), а по оси ординат децибел (дБ). (Единицы измерения условны, так как логарифмы – величина безразмерная.)

Октава и декада – равномерные единицы измерения. Каждой октаве соответствует увеличение частоты ω в два раза, а декада есть интервал частот, соответствующий изменению частоты в 10 раз. Октава равна примерно 0,3 декады (так как lg2 ≈ 0,3, а lg10 = 1). На логарифмической шкале декада изображается отрезком единичной длины, так как lg10ω, 1lg$w$ = 1. Поэтому относительно величины lg$w$ логарифмическая шкала является равномерной, а относительно частоты ω – неравномерной.

Децибел используется при введении логарифмической шкалы по оси ординат амплитудно-частотной характеристики, которая, как известно, показывает, во сколько раз амплитуда выходного сигнала больше или меньше амплитуды входного сигнала. Обозначим ее L, дБ. *Усилением* в децибелах называется величина Ljw = 20 lg$A$(ω). Усилению соответствуют положительные децибелы, а ослаблению – отрицательные. В натуральном масштабе 1 дБ соответствует усилению в 1,12 раза, так как $\sqrt[20]{10} = 1{,}12$ т.е. 20lg1,12≈1. Увеличению L на каждые 20 дБ соответствует изменение амплитуды в 10 раз (так как lg1=0, lg10=1, lg100=2 и т.д.). Таким образом, получается, что 1 дБ = 1/20 дек.

Смысл введения по шкале частот декады, а по оси усиления децибела заключается в том, чтобы при изменении ω от 0 до ∞ усиление (ослабление) по амплитуде изменялось в заметных пределах (усиление в 1 млн раз соответствует всего лишь 6 дек). Ниже приводится соотношение между величинами A и L (табл. 5.1):

Таблица 5.1

Соотношение между величинами *A* и *L*

A	0,1	0,2	1	1,12	2	2	10	100
L	-20	-14	0	1	3	6	20	40

Введение логарифмических частотных характеристик дает ряд преимуществ: по оси частот масштаб автоматически падает с увеличением частоты (это дает возможность охватить весь интересующий исследователя диапазон частот); упрощается построение результирующих частотных характеристик последовательно соединенных звеньев.

5.6. Устойчивость автоматических систем регулирования

Любая система автоматического регулирования состоит из объекта регулирования и регулирующего устройства, соединенных таким образом, что регулируемый параметр на выходе объекта должен поступать на вход регулирующего устройства, а регулирующий сигнал на выходе регулятора должен подаваться на вход объекта регулирования. Но не всякое регулирующее устройство пригодно для автоматизации заданного технологического процесса. Пригодность регулирующей аппаратуры – это прежде всего вопрос устойчивости полученной системы регулирования.

Система автоматического регулирования называется у с т о й ч и в о й, если она, будучи выведена из состояния равновесия, и в дальнейшем не подвергалась никаким внешним воздействиям, с течением времени стремится вернуться в прежнее состояние равновесия.

Допустим, что в равновесном состоянии регулируемая величина имеет некоторое значение y_0. Выведем систему из этого состояния каким-либо внешним воздействием так, чтобы величина y_0 изменилась на значение $y_{\text{вых}}$, и после этого устраним причину, вызвавшую указанное изменение. Тогда, согласно определению, система будет устойчива, если

$$\lim \Delta y \to 0. \tag{5.37}$$

В случае невыполнения этого условия система будет неустойчивой. Устойчивость системы определяется характером ее свободного движения. Так как свободное движение линейной динамической системы описывается однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами (без правой части), то для определения устойчивости достаточно исследовать свойства такого уравнения:

$$a_0 \frac{d^n(\Delta y_{\text{вых}})}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}(\Delta y_{\text{вых}})}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n \Delta y_{\text{вых}}, \tag{5.38}$$

где a_0, a_1,…, a_n – постоянные коэффициенты, зависящие от постоянных времени и коэффициентов усиления; $\Delta y_{\text{вых}}$ – отклонение регулируемой величины от заданного значения.

Решение уравнения (5.38) можно представить как

$$\Delta y_{\text{вых}} = \sum_{i-1}^{N} A_i \mathrm{e}^{\pm P_i t}, \tag{5.39}$$

где A_i – постоянные коэффициенты (постоянные интегрирования), определяемые из начальных условий.

Здесь P_i – корни характеристического уравнения вида

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_n = 0, \tag{5.40}$$

соответствующего исходному дифференциальному уравнению (5.38).

Согласно определению, для устойчивой системы необходимо, чтобы $\Delta y \to 0$ при $t \to \infty$. Это возможно в том случае, если все составляющие уравнения (5.39) с течением времени стремятся к нулю. Поскольку все коэффициенты A_i являются величинами постоянными, то характер поведения каждой составляющей зависит от P_i. Так, если P_i – положительное вещественное число, то A+e+P_{it} с течением времени увеличивается до бесконечности (так как $t \to \infty$) (рис. 5.13, *а*). Наоборот, если P_i является отрицательным вещественным числом, то с течением времени A_ie - P_{it} стремится к нулю (рис. 5.13, *б*). И наконец, если P_i комплексное число, равное $\sigma_i \pm j\omega i$, то

$$A_1 \mathrm{e}^{(\sigma + j\omega)t} + A_2 \mathrm{e}^{(\sigma - j\omega)t} = A\mathrm{e}^{\sigma t} \sin(\omega t + \psi). \tag{5.41}$$

Уравнение (5.41) описывает колебательный процесс, амплитуда которого возрастает или убывает в зависимости от знака вещественной части комплексного корня *P*. Если вещественная часть корня положительная, то получим колебательный процесс (рис. 5.13, *в*) с нарастающей по величине амплитудой. Если же вещественная часть корня отрицательная, то с течением времени амплитуда колебаний будет стремиться к нулю (рис. 5.13, *г*). На рис 5.13 показаны кривые изменения амплитуды в зависимости от знака вещественного корня и вещественной части комплексного корня.

Из сказанного следует у с л о в и е у с т о й ч и в о с т и.
Для обеспечения устойчивости системы автоматического регулирования, описываемой линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, необходимо и достаточно, чтобы вещественные корни характеристического уравнения, соответствующие указанному дифференциальному уравнению, были отрицательными, а комплексные корни имели отрицательную вещественную часть.

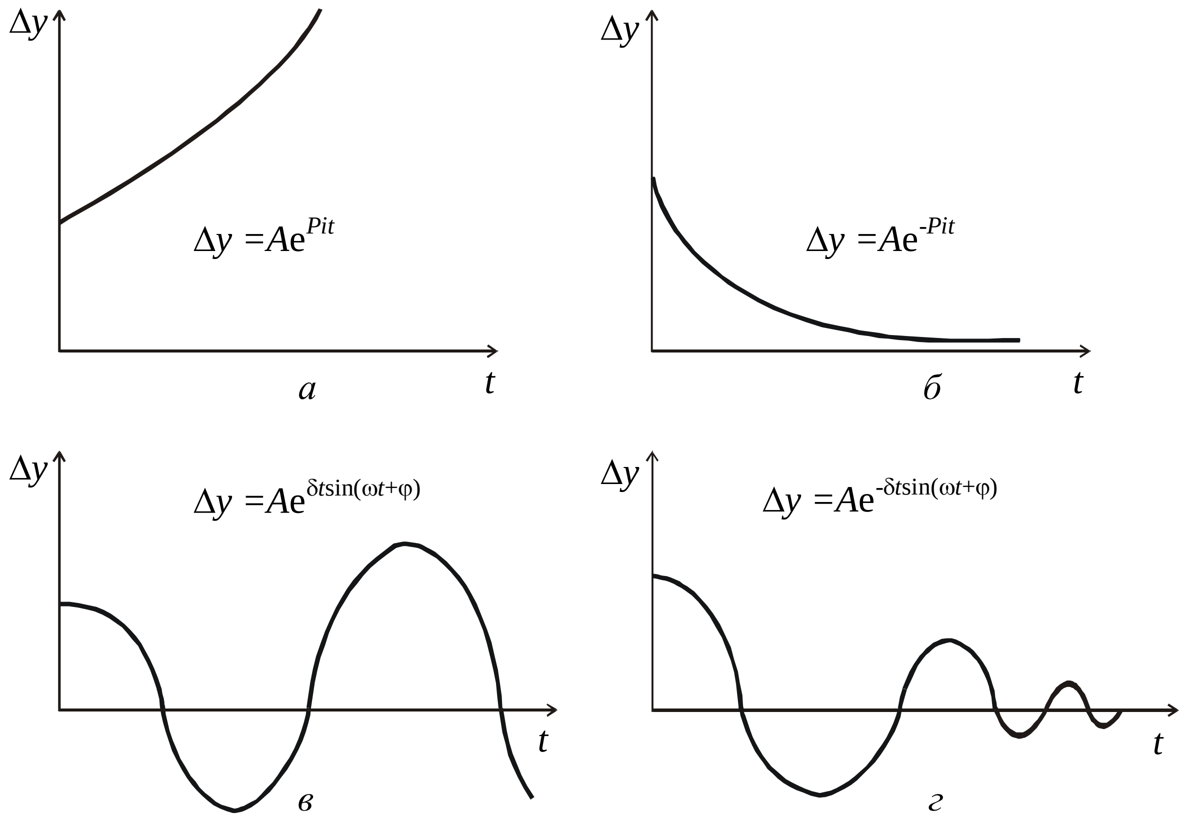

Рис. 5.13. Кривые амплитуд выходной величины

В большинстве случаев системы автоматического регулирования описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Однако при малых отклонениях регулируемой величины нелинейную систему можно заменить ее линейной моделью и таким образом исследовать нелинейную систему как линейную. Для таких систем условия устойчивости (теоремы Ляпунова) формулируются так:

если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы имеют отрицательные вещественные части, то исходная система, описываемая нелинейным уравнением, будет устойчивой;

если среди корней характеристического уравнения линеаризованной системы имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то исходная система, описываемая нелинейными уравнениями, будет неустойчивой.

Эти условия (теоремы Ляпунова) учитывают устойчивость при малых отклонениях (иногда говорят "устойчивость в малом").

Если в характеристическом уравнении имеется нулевой корень или пара чисто мнимых корней, то линеаризированная схема будет находиться на границе устойчивости и система исследуется специальными методами, которые не рассматриваются в курсе.

Таким образом, исследование устойчивости систем автоматического регулирования сводится к определению знаков вещественных частей корней характеристического уравнения.

Для определения устойчивости системы автоматического регулирования необходимо найти корни характеристического уравнения этой системы. Но решение уравнений не вызывает затруднений, если имеются уравнения первого или второго порядка; решение уравнений более высоких порядков осуществляется приближенными методами и требует большого объема вычислительной работы. Для того чтобы обойти эти трудности, необходимо найти такие условия и признаки, по которым можно было бы судить об устойчивости АСР, не решая ее характеристического уравнения.

Эти условия и признаки устойчивости называются *критериями устойчивости*. В 1873–1877 гг. Гаусс предложил критерий, позволяющий, не решая характеристического уравнения, определить, устойчива система или нет. Критерий дан в виде правила, определяющего последовательность математических операций с коэффициентами характеристического уравнения. В 1895 г. в несколько иной форме этот же критерий был предложен швейцарским математиком Гурвицем. По Гурвицу, условие устойчивости формулируется в виде определителей.

Критерий Гаусса – Гурвица применим для исследования систем, которые описываются уравнениями невысокого порядка $n < 5$ и являются алгебраическими, т.е. для определения устойчивости АСР по этому критерию надо иметь дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Критерий Найквиста – Михайлова был предложен Найквистом в 1932 г. для исследования устойчивости усилителей, замкнутых обратной связью, и применен Михайловым в 1936 г. при определении устойчивости АСР.

В настоящее время этот критерий получил большое распространение, так как имеет ряд преимуществ по сравнению с алгебраическим критерием. При помощи критерия Найквиста – Михайлова можно судить об устойчивости системы не только в том случае, когда есть дифференциальное уравнение, но и тогда, когда его нет, а известна только АФК системы (Михайлов). Кроме того, об устойчивости замкнутой системы при помощи этого критерия можно судить по АФК разомкнутой системы (Найквист).

Условия устойчивости, по Михайлову, формулируются так: система регулирования будет устойчивой, если годограф функции

$$f(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (5.42)$$

при изменении ω от 0 до ∞ обходит последовательно в положительном направлении n квадрантов комплексной плоскости, где n – степень характеристического уравнения данной системы. За положительное направление считается движение против часовой стрелки. Примерные формы годографов Михайлова для устойчивых и неустойчивых систем, описываемых уравнениями третьего и четвертого порядка, приведены на рис. 5.14.

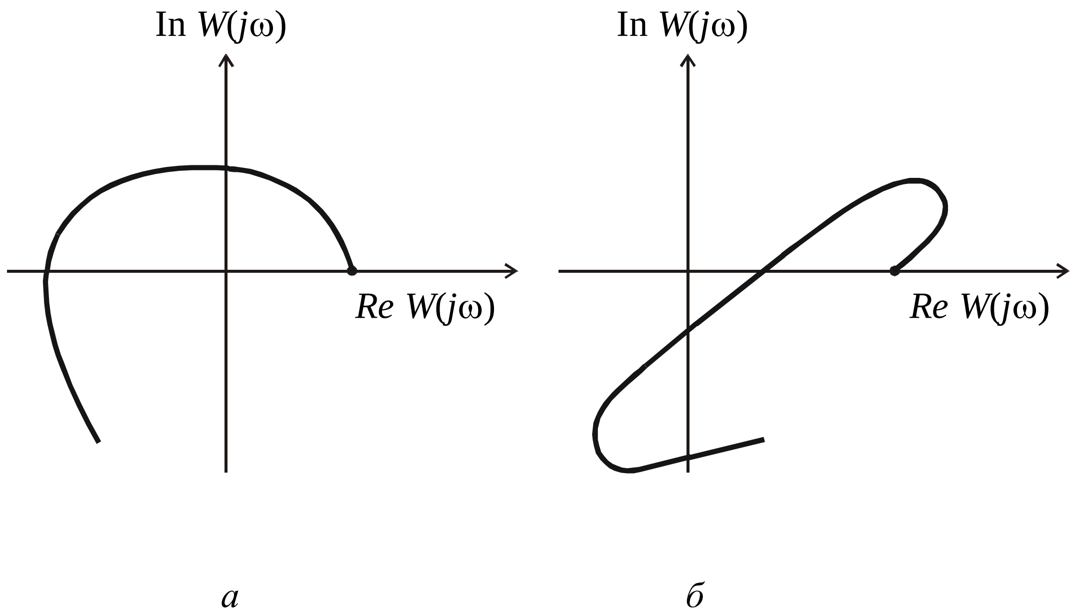

Рис. 5.14. Амплитудно-фазовые характеристики:
а – устойчивая система; *б* – неустойчивая система

5.7. Качество регулирования

Устойчивость является необходимым, но достаточным условием работоспособности системы автоматического регулирования. Помимо устойчивости, к переходному процессу предъявляются требования, обусловливающие качество его протекания. В каждом отдельном случае эти требования могут быть различными.

В общем случае к числу показателей, определяющих качество регулирования, относятся следующие:

статистическая точность регулирования, оцениваемая ошибкой, равной отклонению регулируемой величины от заданного значения по окончании процесса регулирования. Ошибка регулирования характерна для статических систем;

максимальное отклонение регулируемой величины, оцениваемое небольшим отклонением регулируемого параметра от заданного значения в процессе регулирования;

длительность процесса регулирования $t_р$, оцениваемая отрезком времени, по истечении которого отклонение регулируемой величины от заданного не превышает предварительно заданной величины;

колебательность процесса, характеризуемая числом колебаний регулируемой величины за время регулирования $t_р$.

Колебательность процесса принято оценивать по степени затухания, определяемой из выражения

$$\psi = \frac{\Delta y_{\text{вых}_1} - \Delta y_{\text{вых}_2}}{\Delta y_{\text{вых}_1}}. \tag{5.43}$$

Степень затухания показывает, на сколько процентов амплитуда колебаний в кривой переходного процесса изменяется за один период:

$$\psi = \frac{\Delta y_{\text{вых}_1} - \Delta y_{\text{вых}_3}}{\Delta y_{\text{вых}_1}} 100. \tag{5.44}$$

Названные показатели качества приведены на рис. 5.15.

В общем виде о качестве регулирования можно судить по характеру переходного процесса, найденному на основе дифференциального уравнения системы. Поскольку не всегда удается найти точное решение дифференциального уравнения высокого порядка, то в большинстве случаев для оценки качества используют приближенные косвенные методы.

Одним из наиболее широко применяемых методов является метод интегральных оценок качества. Метод интегральных оценок основан на вычислении определенных интегралов от некоторой функции отклонения регулируемой величины. Показателем качества может служить величина площади, ограниченной кривой переходного процесса и осями координат (рис. 5.16): чем она меньше, тем при прочих равных условиях процесс регулирования лучше. Величина же площади (заштрихованная площадь на рис. 5.16, *а*) определяется интегралом

$$I_1 = \int_0^{\infty} (y_{\text{вых}} - y_{\text{вых.уст}}) dt. \tag{5.45}$$

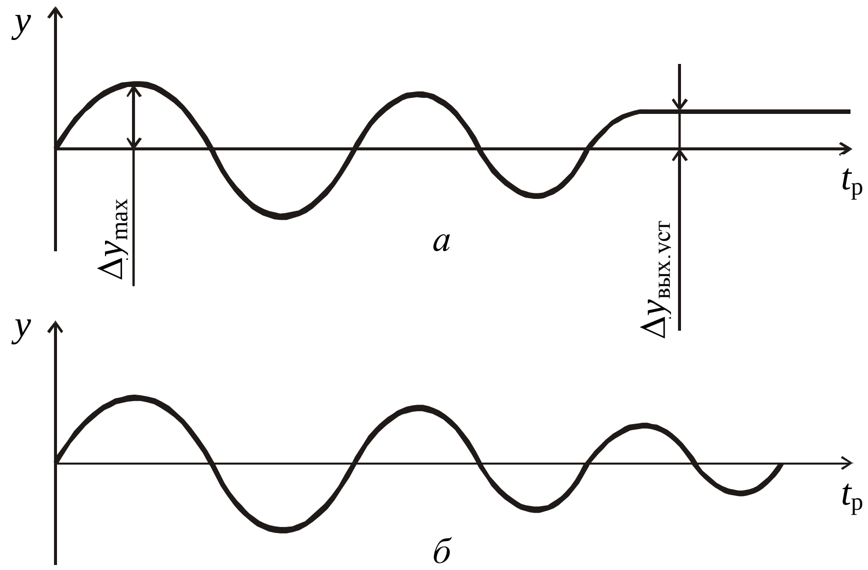

Рис. 5.15. Показатели качества регулирования:
а – для статических систем; *б* – для астатических систем

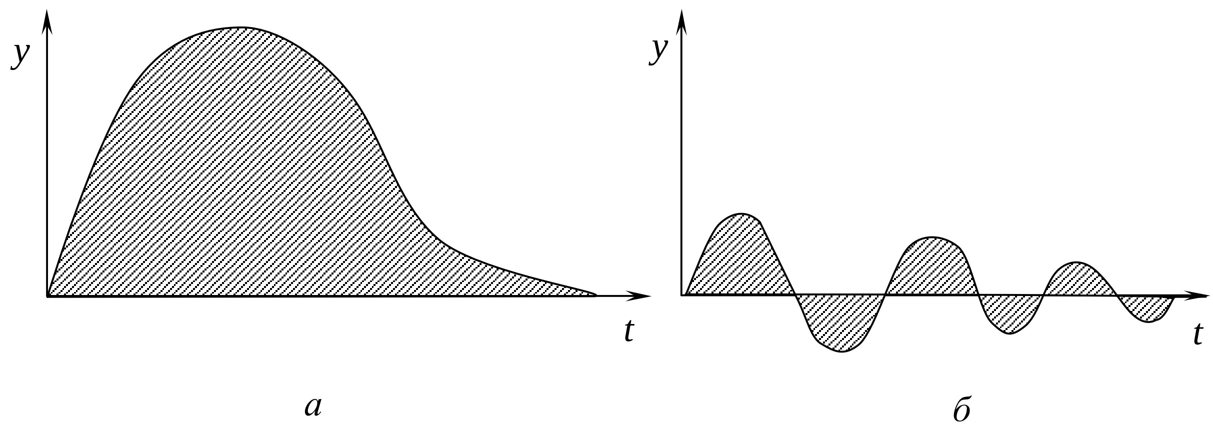

Рис. 5.16. Метод определения качества процесса регулирования:
а – по площади; *б* – квадратичная интегральная оценка

Такую интегральную оценку можно использовать только для переходных процессов, не имеющих перерегулирования и близких к апериодическим. Для колебательного процесса, когда положительные полуволны чередуются с отрицательными (рис. 5.16, *б*), алгебраическая сумма площадей полуволн, определяемая интегралом I_1, не может характеризовать качество регулирования. Для колебательных процессов пользуются квадратичной интегральной оценкой:

$$I_2 = \int_0^{\infty} \left(y_{вых} - y_{вых.уст}\right)^2 dt. \tag{5.46}$$

Эта оценка учитывает сумму абсолютных значений площадей, расположенных по обе стороны от заданного значения.